3.1 流形的定义和例子 2020年11月19日15点16分

**定义3.1.1** 对于子集的每一个点,如果存在一个开集和在的开领域,以及一个满射连续函数使得

1. 是可微的:如果我们写,则函数和具有所有阶连续偏导数;
2. 是同构的:是连续的且具有逆使得是连续的;
3. 满足规则条件:对每一对,微分是一对一线性变换.(详情请参考1.2节内容)

则称是**规则曲面**.

**定义3.1.2** 维度为的拓扑流形是具有可数基的Hausdorff拓扑空间,使得对于所有,都存在的开放邻域与的开集同胚.

鼓励读者参考附录中的A.2节，以了解有关拓扑基础和Hausdorff属性的定义和讨论。 具有可数基数的拓扑空间称为第二可数数。 此定义的技术方面试图定义尽可能一般的对象类别，同时仍与将Rn上的对象广义化的几何相关.

在拓扑流形的定义中，具有子集的M邻域的给定同胚提供局部坐标系或坐标补丁.当一个人在流形上四处移动时,从一个坐标块传递到另一个坐标.在坐标块的重叠中,存在坐标变化函数,根据定义,这些函数是中开集之间的同胚(参见图3.1).但是,为了定义流形上的微积分理论,这些函数必须是可微的.我们在以下定义中明确这一点.

**定义3.1.3** 一个维可微流形是沿着函数组合的拓扑流形,其中是的开集,被称为**charts**,满足

1. 对于每一个char,在是开集且是同构的;
2. 集合的组合,被称为坐标片[coordinate patches],覆盖,即
3. 对于任何一对charts 和,坐标的变化

被称为**转移函数**,是开子集之间的类函数(本书26页).

满足上述条件的函数组合被称为**映射集[atlas]**.

如果一个可微流形的转移函数在映射集中是类或**解析的**,则该流形分别被称为流形,**平滑流形**或**解析流形**.

有关符号的一些注释在这里是按顺序排列的.模仿通用集合的符号习惯(欧氏空间或球面为),如果是维可微流形,我们有时会简称为”可微流形”.而且,尽管从技术上讲,图表是函数,其中是流形的一个开放子集,有时会参考图表（U;φ）来强调用于φ域的字母.由于指定了一个可微分流形,所以图集A是定义的重要部分；因此，有时我们将可区分的流形称为对（Mn; A），以表示我们用来指定图集的字母。 图表的Uα覆盖M，它们满足拓扑流形的条件，即每个x 2 M必须具有与Rn中的开放集合同胚的开放邻域。

乍一看，可微流形的定义似乎不必要地复杂。但是，此定义删除了对环境空间的任何引用，该功能的优点我们在本章的简介中进行了讨论。毕竟，从几何角度来看，这是安全的事情：先验地我们不知道给定的流形是否可以描述为周围欧几里德空间的子集。广义相对论的应用也给出了一个令人信服的理由：在广义相对论中，宇宙是一个不是欧几里得的时空整体，有时被称为“弯曲”。”然而，将这个弯曲的时空视为一个更大的子集会产生误导欧几里德空间：除去对环境空间的任何引用是呈现一种数学结构的正确方法，该数学结构适当地模拟了我们要在其中进行演算的非欧几里德空间。在几何和物理上很有用。

分析中出现的流形的许多属性都是局部属性，因为我们只需要知道点p 2 M某个邻域中的流形M的信息。在这种情况下，我们可以将注意力集中在单个坐标图上 φα：Uα！ Rn，其中p 2Uα。 说点p的坐标（相对于此图表）为（x1; x2;：：：; xn）意味着φα（p）=（x1; x2;：：：xn）。 由于稍后将变得更加清楚的原因，遵循将上标用于坐标的张量表示法惯例非常方便。 这使得在坐标中编写多项式函数更加乏味，但是这种表示法将提供一种方便的方式来区分协变和反变性质。

**定义3.1.4** 拓扑流形上的两个可微映射集和被称为**相容的[compatible]**仅当它们的并集依旧是M的映射集,且中所有的转移函数均是可微的(相应的,,平滑,解析的).

有趣的是,并非所有映射集都在给定类别中兼容.两个类的图集的并集也可能形成类映射集,其中.映射集之间的相容性概念是一个等价关系,可微分(相应的,,平滑,解析的)映射集的等价类称为**可微分**(相应的,,平滑,解析的)**结构**.证明给定拓扑流形具有唯一的可微结构或枚举给定拓扑流形上的可微结构所涉及的技术不在本书的讨论范围之内.例如,在1963年出版的[29]中,Kervaire和Milnor证明了正好具有28个非微分光滑结构.

**定义3.1.14** 令和是两个可微分(分别为,平滑,解析的)流形.将它们各自的映射集称为和.考虑配备乘积拓扑的集合M×N.如果是的chart以及是的chart,然后通过定义函数.集合在上定义了一个微分(分别为,平滑,解析的)结构,称为**乘积结构**.

**3.2 流形之间的可微映射** 2020年11月25日09点46分

**定义3.2.1** 令和是可微的(分别为,光滑,解析)流形.假设函数是连续的,对于上的任意chart 和上的任意chart ,如果映射

是可微分函数(分别为,光滑,解析),则称是**可微的**.(请参见图3.7.)我们用表示从到的可微分映射的集合.

在上面的定义中,的域和共域可能看起来很复杂,但是对于这种函数组合,它们是自然的.

从该定义得出,两个流形之间的函数不能具有比流形本身更强的微分性.(请参阅练习3.2.9.)特别是,如果和是可微分流形,则我们不能在它们之间讨论级或更高的函数.将注意力集中在平滑的流形上,消除了这种担忧.

在线性代数中,我们不关心向量空间之间的所有函数,而只关心线性变换,因为从直觉上讲,线性变换“保留向量空间的结构”.此外,两个向量空间V和W被认为是相同的(同构)仅当它们之间存在双射线性变换.以同样的方式,在可微流形的类别中,我们仅考虑流形之间的可微(或或光滑)映射,如果两个流形是**微分同胚[diffeomorphic]**,我们认为它们是相同的.

**定义3.2.2** 令和为两个可微流形.和之间的**微分同构[diffeomorphism]**(分别为微分同构)是双射函数使得可微分(分别为)和可微分(分别为.如果和之间存在微分同构,则我们说和是**微分同构的[diffeomorphic]**.

**定义3.2.5** 令为可微流形.上的**可微曲线**是可微函数,其中区间被理解为具有从继承的微分结构的一维流形.上的**闭合微分曲线**是微分函数,其中是圆形流形.

**3.3 切空间** 2020年11月25日10点49分

在规则表面的局部理论中,切平面起着特别重要的作用.我们将切线平面上的第一个基本形式定义为中点积对切线的限制.从第一种基本形式的系数中,可以获得所有本征几何的概念,包括曲线之间的角度,区域面积,高斯曲率,测地线甚至欧拉特征(请参见[5]中对本征几何的引用).但是,实际可微流形的定义没有引用环境欧几里得空间,因此我们不能模仿中的曲面理论将流形的切线空间定义为某个的向量子空间.

从物理角度来看,我们通常将表面的切向量视为到上某条曲线的处的速度向量.我们知道该速度向量是中的一个元素.由于我们在不参考环境欧几里得空间的情况下定义流形,因此简单地想象切向量的概念就构成了严重的概念挑战.

读者可以预见,要避免这种困难,我们必须朝抽象的方向迈出一步.我们将切线矢量确定为流形上实值函数的点处的方向导数.此外,由于不能使用环境欧几里得空间中的矢量来描述方向的概念,因此我们使用上通过点的曲线提供方向的概念.以下构造使这一过程变得精确.

**定义3.3.1** 令为可微流形,令为上的一个点.令,并令为上具有的可微曲线.对于定义在的某个邻域上的实值可微函数,我们将在上沿的**方向导数**定义为

算子称为处的**切向量**.(流形上的切向量与空间的切向量不同,它是标量,不是向量)

如果和是满足上述定义条件的两条曲线,则对于在的开放邻域中定义的所有可微函数,如果这些算子在处具有相同的值,则.

注意是一个函数,因此公式(3.6)中的导数是通常意义上的.还可以观察到有趣的是,以上定义未明确引用上的任何特定图表.但是,为了计算,可能有必要引用附近的图表.

切线向量的上述定义最初可能会导致精神不适,因为它将切线向量表示为运算符,而不是作为我们用来处理的几何对象.但是,中规则曲面的任何切线矢量(用经典意义定义)自然会定义函数的方向导数.定义3.3.1概括了切向量的通常概念(请参阅[5]第5.2节]).

正如名称“切线向量”所暗示的那样,所有切线向量的集合形成一个向量空间,这是我们现在要说明的事实.

令为中的开放邻域,称为从到的所有可微函数的集合(向量空间).先验地,上处的切向量的集合是所有运算符的子集.通过微分属性

因此是从到的线性变换.对于熟悉矢量对偶空间的读者来说,后一个结果表明在对偶矢量空间中.(我们将在第4.1节中讨论向量空间的对偶.)我们想证明切向量的集合是的子空间,即在加法和标量乘法下闭合.

设是的可微曲线.如果我们定义,其中是某个实数,那么对任何可微函数使用链式规则,我们有

这表明切向量的集合在标量乘法下是封闭的.

为了证明相切向量集在加法下是封闭的,我们参考坐标图,其中是的开放邻域.在不失一般性的前提下,我们假设.我们重写组成,其中和.根据多变量分析中的链规则,定理(1.3.3),我们有

其中我们在处评估,因为.

令和是上的两条微分曲线,使得.在和的域的交点上,定义曲线

注意到.此外,对于任意函数,我们有

因此,切向量的集合在加法下是封闭的.这使我们能够证明以下基本事实.

**命题3.3.2** 令为维的可微流形,令p为的点.处的所有切向量的集合为维的向量空间,其基为,其中是附近某些图表上的坐标.

**定义3.3.3** 切向量的向量空间称为在处的**切空间**,用表示.

**定义3.3.4** 中的函数如果满足下列两个条件,则称该函数为在的**导数[derivation]**

1. 线性:对所有成立;
2. 莱布尼兹法则:对所有成立.

请注意,是一个**代数**,即在向量空间上配备了“乘”运算的向量空间,该向量在向量空间上是双线性的.因此,如果,则对的的导数为从的代数到的线性变换,另外满足了等于乘积规则的条件.

**命题3.3.5** 令为在处的导数,而为上的常数函数.则.

**定理3.3.6** 令为可微分流形.则切线空间是在处的导数集合.

**命题3.3.9** 令为可微流形;令和为重叠坐标charts;设.用表示的坐标,用表示的坐标.令和表示的两个基(其中表示).在上从坐标到坐标的坐标变化矩阵为,即转移函数的微分.换句话说,对于所有,如果